Números irracionales

De cómo nos volvimos irracionales

ACTIVIDAD 1

En la clase de matemáticas el profesor planteó un desafío. Dentro de un cuadrado de área 4 cm^2 había que insertar otro, de manera tal que los vértices del cuadrado más pequeño coincidieran con los puntos medios de los lados del cuadrado que lo contenía.

a. Dibujen la situación.

b. ¿Cuánto mide el área del cuadrado interior?

c. ¿Cuánto mide el lado de cada uno de los cuadrados?

d. Belén y Valentina no tenían calculadora y, después de pensar un rato, llegaron a la conclusión de que la medida del lado del cuadrado menor era un número entre 1,41 y 1,42. Facundo obtuvo en su calculadora 1,414213 y Rocío 1,414213562. ¿Cómo les parece que razonaron Belén y Valentina para obtener esa aproximación?

e. Al día siguiente, los chicos seguían discutiendo cuánto medía el lado exactamente. Aunque habían utilizado una calculadora que daba más cifras decimales que las que habían obtenido Facundo y Rocío, no encontraban en ellas un período. Luego de un rato, Belén dijo: "No vale la pena que sigamos discutiendo. Ningún número racional al cuadrado dará 2 justo. Fíjense por ejemplo en el resultado de Facundo: basta con mirar las cifras decimales, no podrá jamás dar ceros al hacer la multiplicación. Todas las calculadoras están aproximando el resultado". ¿Pueden explicar lo que dijo Belén?

Para reflexionar

Aunque los chicos tuvieran la posibilidad de usar calculadoras que dieran el resultado con más cifras decimales, sólo encontrarían que hay cada vez más números después de la coma. Estas cifras después de la coma tienen la particularidad de no repetirse periódicamente.

Los números en los que esto ocurre son los llamados números irracionales. Que un número sea irracional significa que no puede expresarse como una razón de números enteros. Cuando los chicos empezaron a estudiar el conjunto de los números enteros vieron que éste contenía al de los naturales. Más tarde, cuando estudiaron los números racionales, vieron que los números enteros pueden pensarse como racionales de denominador 1. ¿Encuentran alguna relación entre el conjunto de los números irracionales y los otros conjuntos numéricos que ya conocían? ¿Por qué suele decirse que con los irracionales se completa la recta numérica?

ACTIVIDAD 2

Belén y Valentina estaban desconcertadas: ellas sabían representar números racionales y, además, habían leído que cada número real admitía una representación sobre la recta numérica. Entonces,

a. ¿Cómo representar un número con infinitas cifras decimales no periódicas, como $\sqrt{2}$?

El hermano mayor de Valentina les había dicho que deberían saber hacerlo: los estudiantes en la antigua Grecia sólo necesitaban regla y compás. Les dio además una pista: que construyeran un cuadrado de lado 1.

b. ¿Cómo se las ingeniaron las chicas para hacer la representación?

c. ¿Podrían ubicar en la recta numérica, utilizando un procedimiento similar, los números $-\sqrt{5}$, $2\sqrt{2}$ y $1 + \sqrt{2}$?



d. Mientras ubicaban estos números en la recta, el hermano de Valentina, al verlas tan entusiasmadas, las previno: “Tengan cuidado, no todos los números irracionales pueden representarse de esta manera”. ¿Por qué habrá dicho esto?

ACTIVIDAD 3

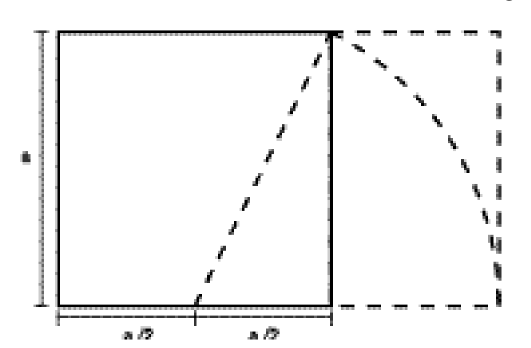
Todos sabemos que el número π es irracional. Ahora bien, también sabemos que se obtiene como cociente entre los valores de la longitud del perímetro de una circunferencia y su diámetro. ¿No significa esto, entonces, que π es racional?

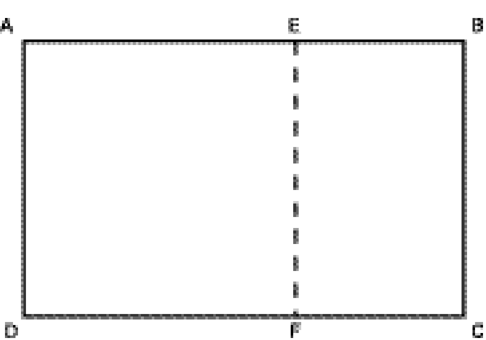
ACTIVIDAD DE CIERRE

Algunas personas encuentran que unos rectángulos son más “agradables” que otros. Algunos encuentran “agradable” que la base sea el doble de la altura y otros prefieren a los que guardan una proporción áurea.

Se dice que un rectángulo es áureo si la razón entre la longitud del lado mayor y la del lado menor es el número de oro: $(1 + \sqrt{5})/2$.

Una manera de construir el rectángulo áureo es comenzando por dibujar un cuadrado cualquiera. Unimos el punto medio de la base con un vértice no alineado con él, y abatimos este segmento sobre la base, como se muestra en la figura:





El rectángulo ABCD es un rectángulo áureo.

Lo más curioso de este rectángulo es que EBCF también es áureo y, si lo dividimos de tal manera que en su interior queden determinados un cuadrado y un rectángulo, el nuevo rectángulo interior también es áureo. Podemos seguir así indefinidamente, obteniendo siempre rectángulos áureos.

Trazando las diagonales de los cuadrados, tal como se muestra en la figura, y uniendo sus extremos con arcos de circunferencia, se obtiene la espiral áurea.

La espiral áurea se observa en la naturaleza; por ejemplo, en los caparazones de los caracoles y en las galaxias espirales.

